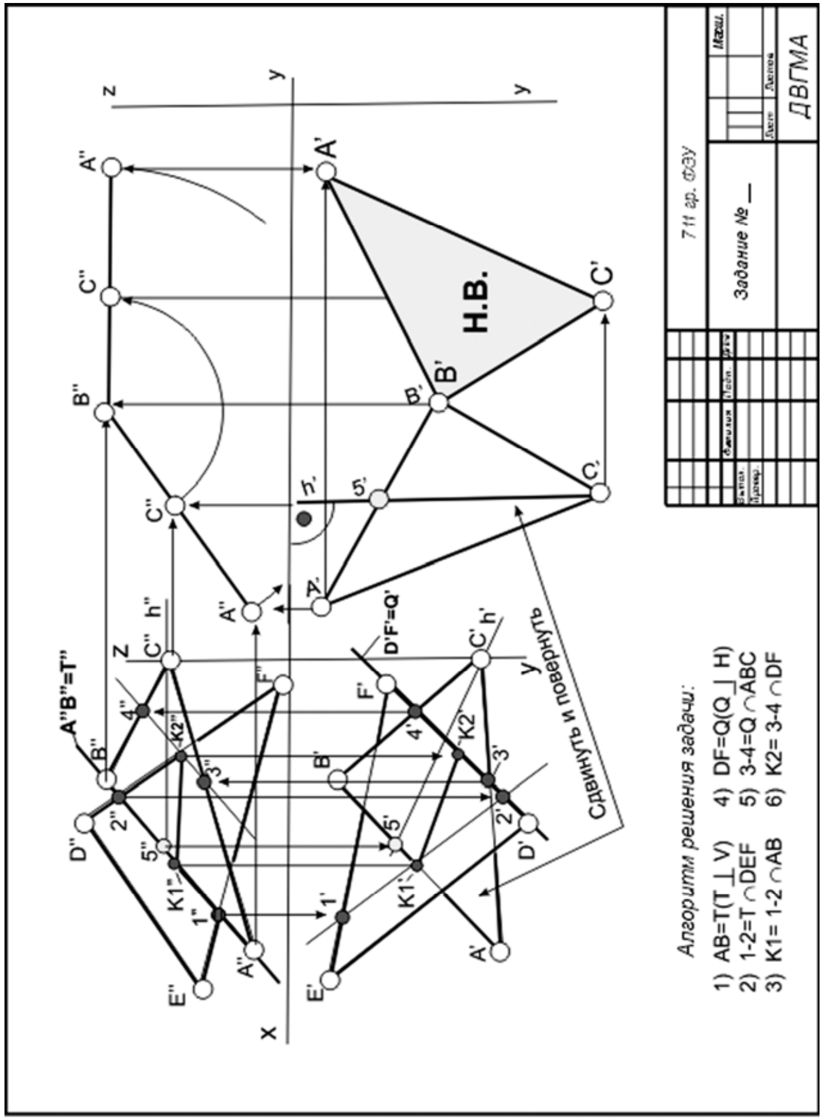


НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

лекции

домашние задания

Электронные ресурсы
в Интернете:
vm.msun.ru
в Интранете МГУ:
vm

Табл. 1. Варианты координат точек к заданию 1

Даны **A, B, C** - точки основания пирамиды, **D** - точка основания параллелограмма и вершина т. **S** - пирамиды строятся.

Номер в кл. журн.	A	B	C	h*	D**	S**
1-5*	Ax = 55 Ay = 25 Az = 100	Bx = 0 By = 85 Bz = 60	Cx = 120 Cy = 90 Cz = 40	-125*	Dx=65 Dy=150 Dz=8	Sx=74 Sy=156 Sz=153
[redacted]	Ax = 0 Ay = 50 Az = 85	Bx = 50 By = 80 Bz = 25	Cx = 115 Cy = 10 Cz = 85	-140	Dx=165 Dy=40 Dz=25	Sx=119 Sy=151 Sz=138
[redacted]	Ax = 20 Ay = 12 Az = 100	Bx = 85 By = 80 Bz = 35	Cx = 136 Cy = 50 Cz = 85	-135	Dx=200 Dy=118 Dz=20	Sx=87 Sy=167 Sz=144
[redacted]	Ax = 18 Ay = 40 Az = 35	Bx = 83 By = 117 Bz = 6	Cx = 136 Cy = 47 Cz = 20	-120	Dx=201 Dy=124 Dz= -9	Sx=122 Sy=118 Sz=127
[redacted]	Ax = 0 Ay = 50 Az = 15	Bx = 50 By = 110 Bz = 8	Cx = 122 Cy = 40 Cz = 85	-70	Dx=172 Dy=100 Dz=38	Sx=68 Sy=99 Sz=100
[redacted]	Ax=18 Ay = 40 Az = 9	Bx = 83 By = 111 Bz = 40	Cx = 135 Cy = 47 Cz = 30	-80	Dx=200 Dy=118 Dz=61	Sx=96 Sy=57 Sz=111

h* - направление перпендикуляра в скрипте задаем с учетом знака

** Координаты точек **D** и **S** - даны для справок

Табл. 2. Варианты заданий координат точек к заданию 2

Найти линию пересечение двух плоскостей, определить натуральную величину одной из них.

Номер в журнале	A	B	C	D	E	F
1-5*	Ax = 115 Ay = 90 Bz = 10	Bx = 52 By = 25 Bz = 80	Cx = 0 Cy = 80 Cz = 45	Dx=65 Dy=105 Dz=80	Ex=130 Ey=18 Ez=35	Fx=12 Fy=50 Fz=0
[redacted]	Ax = 117 Ay = 9 Az = 90	Bx = 52 By = 79 Bz = 25	Cx = 0 Cy = 48 Cz = 83	Dx=65 Dy=86 Dz=110	Ex=135 Ey=36 Ez=19	Fx=14 Fy=0 Fz=52
[redacted]	Ax = 116 Ay = 8 Az = 88	Bx = 50 By = 78 Bz = 25	Cx = 0 Cy = 46 Cz = 80	Dx=70 Dy=85 Dz=108	Ex=135 Ey=36 Ez=20	Fx=15 Fy=0 Fz=52
[redacted]	Ax = 18 Ay = 10 Az = 90	Bx = 83 By = 79 Bz = 25	Cx = 135 Cy = 48 Cz = 83	Dx=67 Dy=85 Dz=110	Ex=0 Ey=36 Ez=19	Fx=121 Fy=0 Fz=52
[redacted]	Ax = 18 Ay = 90 Az = 10	Bx = 83 By = 25 Bz = 79	Cx = 135 Cy = 83 Cz = 48	Dx=67 Dy=110 Dz=85	Ex=0 Ey=19 Ez=36	Fx=121 Fy=52 Fz=0
[redacted]	Ax=120 Ay = 10 Az = 90	Bx = 48 By = 82 Bz = 20	Cx = 10 Cy = 52 Cz = 82	Dx=65 Dy=80 Dz=110	Ex=130 Ey=38 Ez=20	Fx=15 Fy=0 Fz=52

Лекция 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Начертательная геометрия занимается изучением способов изображения предметов на плоскость и решением геометрических задач по заданным изображениям.

В основе построения изображений лежит метод проекций: отображение геометрической фигуры на плоскость путем проецирования ее точек.

1.1. Центральное и параллельное проецирование

Проецированием называется процесс построения изображений с помощью проецирующих прямых. Проекцией т. A называют т. A' пересечения проецирующей прямой с плоскостью изображения (рис. 1.1 *а*).

Если все проецирующие прямые проходят через одну т. S (центр проекций) пространства (рис. 1.1 *б*), то проецирование называется центральным; если проецирующие прямые параллельны (рис. 1.1 *в*), то проецирование называется параллельным.

В зависимости от направления проецирующих прямых по отношению к плоскости проекций, параллельные проекции делятся на прямоугольные — проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций (рис. 1.2 *а*) — и косоугольные — проецирующие лучи наклонны к плоскости проекций (рис. 1.2 *б*).

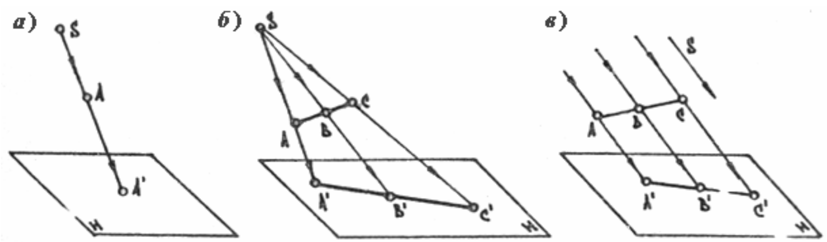


Рис. 1.1

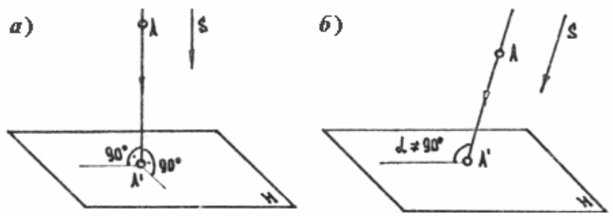


Рис. 1.2

1.2. Основные свойства параллельного проецирования

Геометрические фигуры проецируются на плоскость в общем случае

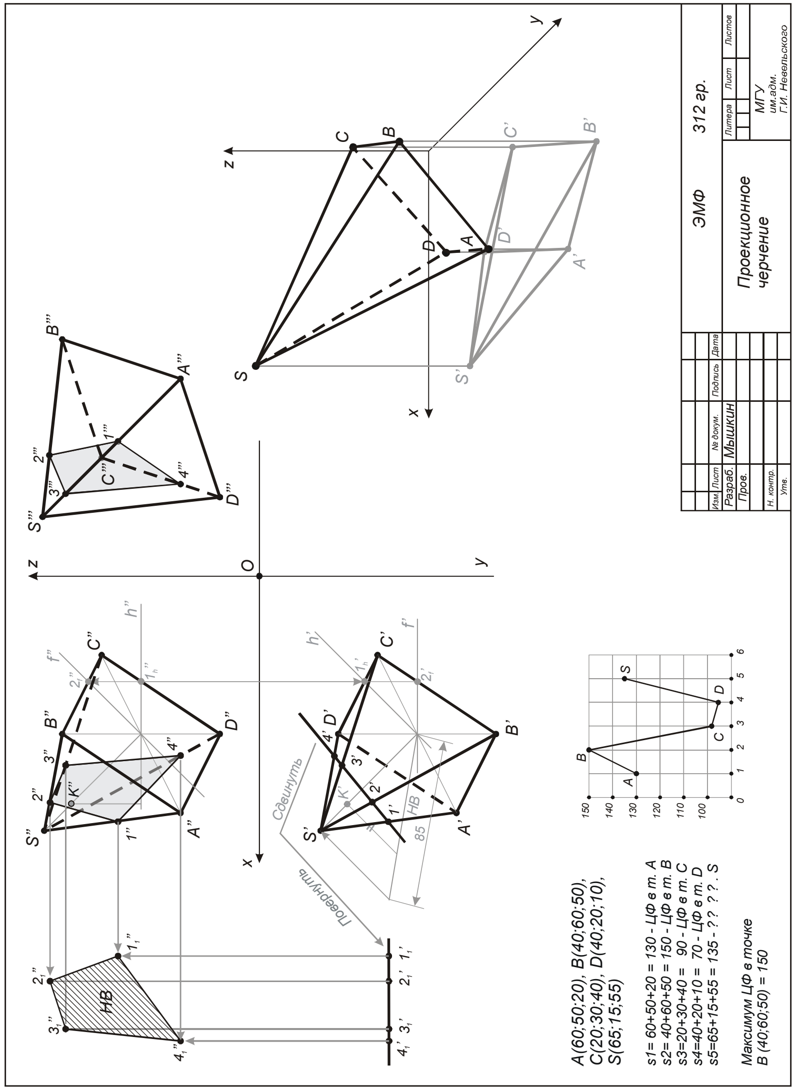
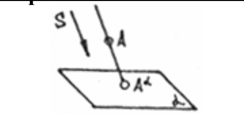
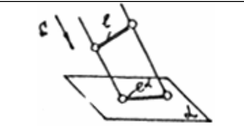
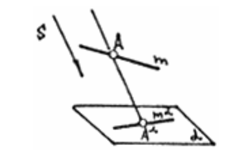
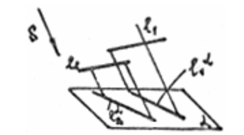
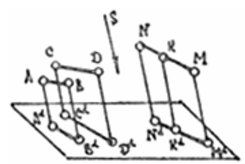
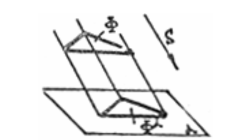
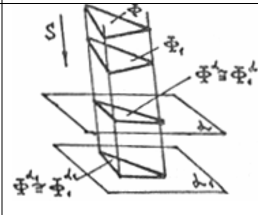


Таблица 1.1

Основные свойства параллельного проецирования

Название и определение	Графич. изображение	Алгоритм
1. Свойство однозначности. Проекция точки — есть точка		$A \xrightarrow{P_s^\alpha} A^\alpha$
2. Свойство прямолинейности. Проекция прямой на плоскость есть прямая		$(\forall l)\,(l \nparallel S)\,[l \xrightarrow{P_s^\alpha} l^\alpha]$
3. Свойство принадлежности. Если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки принадлежит проекции прямой		$[\forall A, m][A \in m \Rightarrow A^\alpha \in m^\alpha]$
4. Свойство параллельности. Проекции взаимно-параллельных прямых также параллельны		$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_1^\alpha \parallel l_2^\alpha$
5. Свойство пропорциональности. Отношение отрезков одной прямой или расположенных на прямых равно отношению их проекций		$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow \frac{\lvert AB\rvert}{\lvert CD\rvert} = \frac{\lvert A^\alpha B^\alpha\rvert}{\lvert C^\alpha D^\alpha\rvert};$ $K \in [NM] \wedge \frac{\lvert NK\rvert}{\lvert KM\rvert} = \frac{m}{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{\lvert N^\alpha K^\alpha\rvert}{\lvert K^\alpha M^\alpha\rvert} = \frac{m}{n}$
6. Свойство конгруэнтности. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в конгруэнтную фигуру		$\Phi \parallel \alpha \Rightarrow \Phi^\alpha \cong \Phi$
7. Свойство переноса. Параллельный перенос оригинала на плоскости проекций не изменяет вида и размеров проекций оригинала		$(\Phi \to \Phi_1) \wedge (\Phi_1 \parallel \Phi) \Rightarrow$ $\Rightarrow \Phi^\alpha \cong \Phi_1^\alpha$

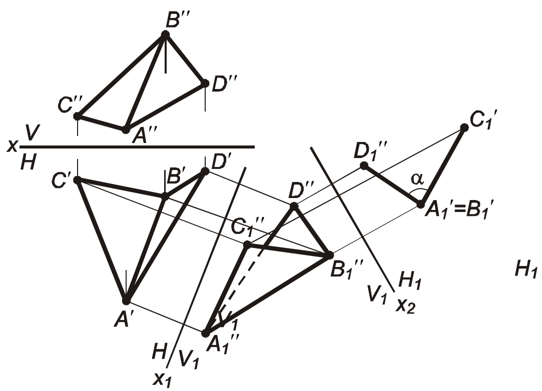


Рис. 8.7

8.3. Определение н.в. плоского сечения многогранников

Пример 1. На рис. 8.8 н.в. сечения *1-2,3* определена способом замены плоскостей проекций по схеме $x(V/H) \to x_1(V/H_1)$.

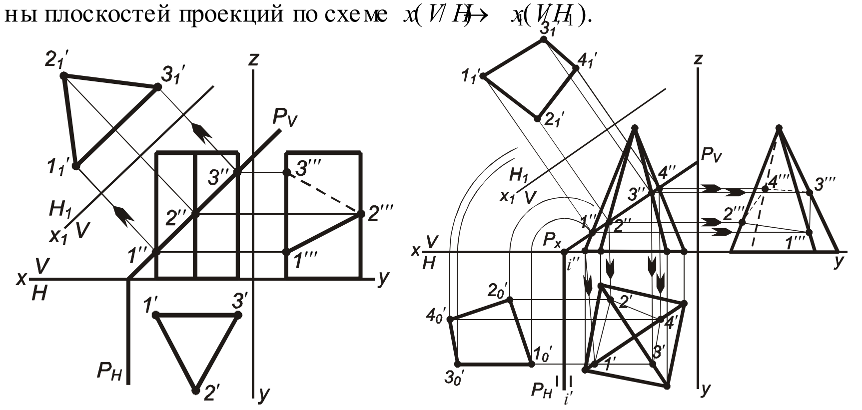


Рис. 8.8, 8.9

Пример 2. Т. *1'', 2'', 3'', 4''* являются фронтальными проекциями точек *1, 2, 3, 4* пересечения ребер пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью *P* (рис. 8.9). Горизонтальные проекции *1' 2' 3' 4'* этих точек определяются из условия их принадлежности ребрам пирамиды. Н.в. фигуры сечения на рис. определена двумя способами — способами замены и совмещения (это является и вращением вокруг горизонтали P_H и вращением вокруг фронтально проецирующей оси, если P_H взять за такую ось).

Лекция 2. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ, МНОГОГРАННИКОВ

2.1. Ортогональные проекции прямой

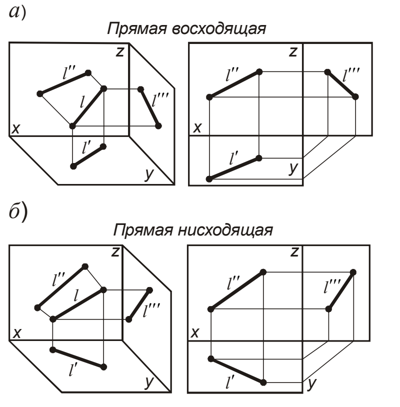


Рис. 2.1

Прямая линия определяется двумя точками, а ее проекции — проекциями этих точек. Прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения.

Признаком восходящей прямой является одинаковое направление проекций прямой относительно оси *x*, а нисходящей — разное (рис. 2.1).

Прямая, параллельная или перпендикулярная плоскостям проекций, называется прямой частного положения.

Прямая, параллельная плоскости проекций, называется линией уровня (рис. 2.2).

Прямая, перпендикулярная к плоскости проекций, называется проецирующей (рис. 2.3).

Примечание: Частные положения прямых имеют важное значение для решения позиционных и метрических задач, например, отрезок, ‖ плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в н.в.

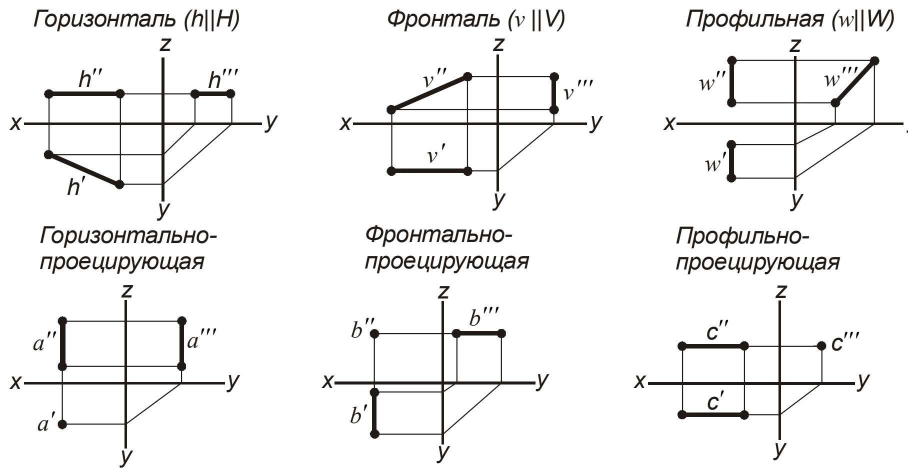


Рис. 2.2-2.3

8.2. Решение метрических задач способом замены плоскостей проекций

Пример 1. Отрезок прямой проецируется в н.в., если он расположен ∥ пл. проекций.

На рис. 8.2 заменяем пл. V пл. V_1, ∥ AB.

Для этого проводим ось x_1 ∥ $A'B'$ и находим т. A_1'', B_1'' в пл. V_1. Проекция $A_1''B_1''$ определяет н.в. отрезка AB, угол α_H — угол наклона прямой AB к H.

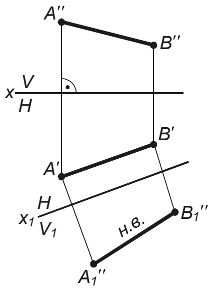


Рис. 8.2

Пример 2. Определение н.в. плоской фигуры (ABC) производится выбором новой плоскости, ∥ пл. ΔABC.

Плоскость ABC (рис. 8.3) в $\frac{V}{H}$ является плоскостью общего положения. Сразу выбрать новую плоскость, ∥ к заданной и ⊥ той или иной координатной плоскости невозможно. Поэтому делаем двойную замену по схеме:

$$x\frac{V}{H} \to x_1\frac{V_1}{H_1} \to x_2\frac{V_1}{H_1}.$$

Первую плоскость V_1 выбираем ⊥ к плоскости ABC. Для этого ось x_1, проводим ⊥ горизонтали A-1 ∈ пл. Вторую новую плоскость H_1 выбираем ∥ ΔABC, что будет соответствовать выбору новой оси x_2 ∥ $A_1''B_1''C_1''$.

Пример 3. Определить расстояние между ∥ прямыми (рис. 8.4)

Расстояние между ∥ прямыми измеряется отрезком перпендикуляра к этим прямым. На рис. задача решена способом замены плоскостей проекций: двойной заменой прямые приведены в положение, ⊥-е к пл. H_1.

Искомое расстояние равно отрезку $K_1'N_1'$. Проекция $K_1''N_1''$ на пл. V_1 взята произвольно, но ∥ оси x_2 (по условию, что $K_1'N_1'$ — н.в.).

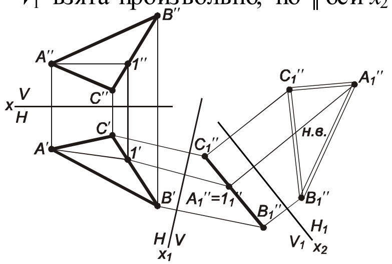


Рис. 8.3

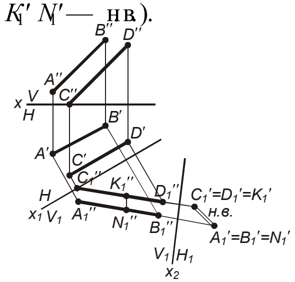


Рис. 8.4

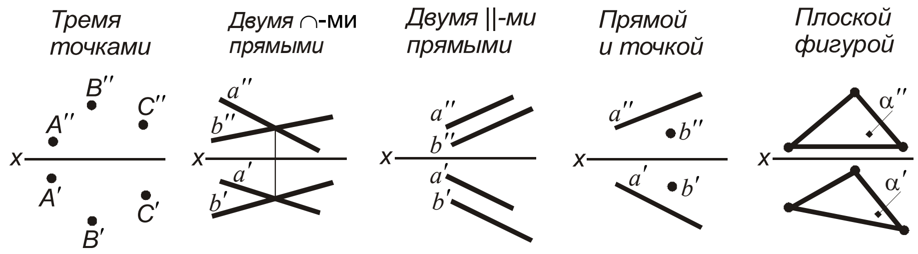


Рис. 2.4

Задание плоскости общего положения следами

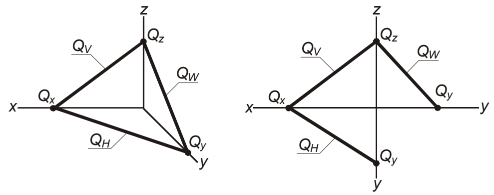


Рис. 2.5

Плоскости частного положения

Плоскость, ∥ или ⊥ к плоскости проекций, называется плоскостью частного положения.

Плоскости, ⊥ плоскости проекций, называются проецирующими (рис. 2.6).

Проекции всех точек проецирующей плоскости и всех линий фигур, лежащих в ней, принадлежат вырожденной проекции (следу) плоскости, к которой она ⊥. Это является важным свойством при решении многих задач в н.г.

Плоскости, ∥ плоскостям проекции, называются плоскостями уровня (рис. 2.7). Плоскости уровня одновременно ⊥ к двум плоскостям проекций и поэтому обладают свойствами проецирующих плоскостей.

В табл. 2.1 приведена классификация плоскостей, заданных плоской фигурой на всех трех координатных плоскостях.

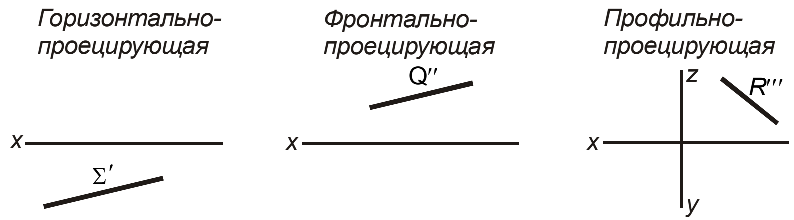


Рис. 2.6

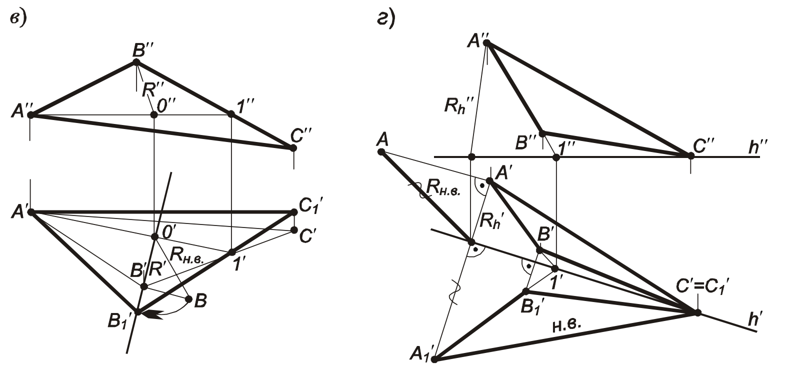


Рис. 7.5

7.5. Способ совмещения

Совмещение является частным случаем вращения вокруг линии нулевого уровня (следов плоскости). За ось вращения выбирается горизонтальный или фронтальный след (нулевые горизонталь или фронталь).

На рис. 7.6 показан алгоритм совмещения плоскости Q с плоскостью H. Вращение т. H полностью соответствует алгоритму вращения т. вокруг линии уровня.

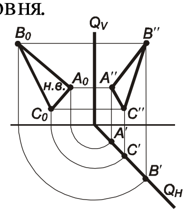


Рис. 7.7

На рис. 7.7 определена н.в. сечения призмы плоскостью общего положения вращением вокруг горизонтального следа (нулевой горизонтали).

На рис. 7.8. и рис. 7.9 определена н.в. фигуры (треугольника), находящейся в проецирующей плоскости. Здесь совмещение является частным случаем вращения плоскости вокруг проецирующей оси: на рис. 7.7 — вращение вокруг горизонтально проецирующей оси; на рис. 7.9 — вращение вокруг фронтально проецирующей оси.

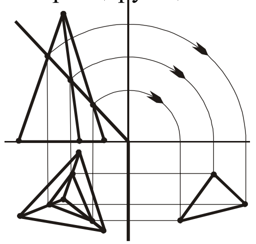


Рис. 7.9

Лекция 3.

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ВЗАИМОПРИНАДЛЕЖНОСТЬ

Задачи, в которых определяется взаимное положение фигур относительно друг друга, называются позиционными.

К ним относятся задачи на взаимопринадлежность (взять точку на линии или плоскости, провести прямую в плоскости) и задачи на пересечение (найти точку пересечения прямой с плоскостью, линию пересечения двух плоскостей).

3.1. Взаимное положение двух точек

Две точки пространства могут совпадать или не совпадать.

Если точки совпадают, то совпадают и их проекции. Если же точки не совпадают, то их проекции различны или, по крайней мере, не должна совпадать одна пара их проекций (рис. 3.1).

Конкурирующими называются точки, расположенные на одной проецирующей прямой. Признак: проекции этих точек совпадают в одну точку на той плоскости, к которой их носитель (проецирующая прямая ⊥). Рис. 3.2

При определении видимости используют критерий видимости конкурирующих точек: из двух горизонтально-конкурирующих точек видна та, которая выше, из двух фронтально-конкурирующих точек видна та, которая ближе, и из двух профильно-конкурирующих точек видна та точка, которая расположена левее.

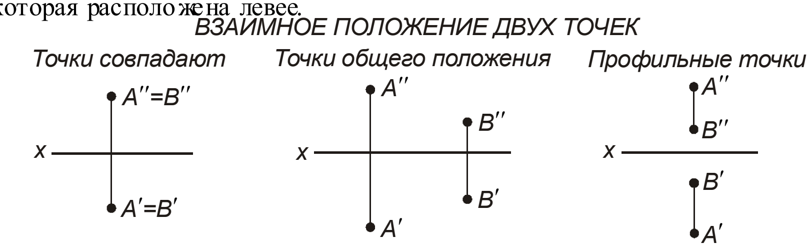


Рис. 3.1

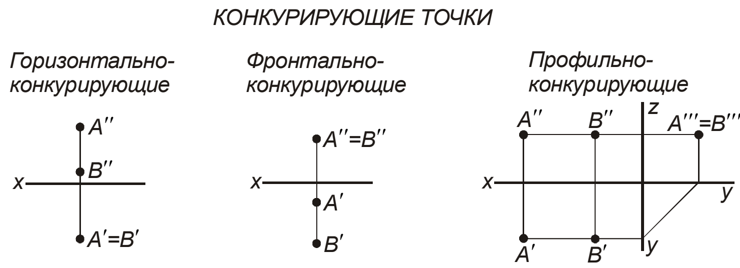


Рис. 3.2

пря му — поворачивается ли ьодна точка.

На рис. 7.2 *б* прямая вра ением одной т. *A* приведена в положение, ∥ пл. *V*.

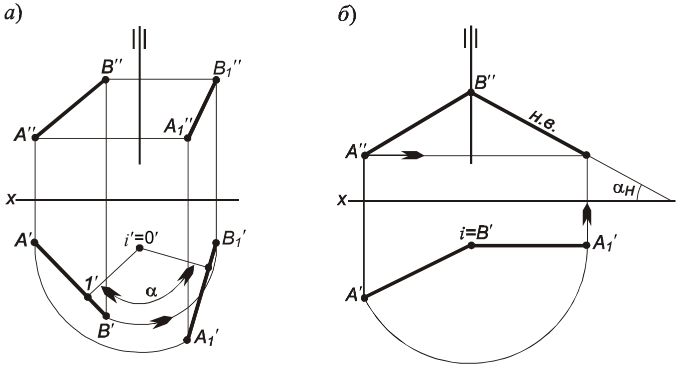


Рис. 7.2

7.3. Вра ение плоскости вокруг проециру щ ей оси

Н.в. плоской фигуры об его положения определяется последовательным вра ением вокруг осей, ⊥ к плоскостям проекций.

На рис. 7.3 *а* первым вра ением вокруг оси $i_1 \perp H$ плоскость преобразована во фронтально-проециру щ ю . Для этого горизонталь *C-1* приведена в положение $\perp V$. Вторым вра ением вокруг $i_2 \perp V$ плоскость *ABC* приведена в положение, ∥ пл. *H*.

Проекция $A_2' B_2' C_2'$ — н.в. ΔABC.

На рис. 7.3 *б* плоскость, заданная следами, приведена во фронтально проецирующ е положение.

7.4. Вра ение вокруг линии уровня

Точка при вра ении вокруг линии уровня, например, вокруг горизонтали, вра ается по окружности, причем в плоскости, ⊥-й оси вра ения *h*. Центр вра ения *O* находится на оси вра ения, а величина радиуса враще ения равна расстоянию от точки *A* до оси вращ ения.

Окружность — траектория движения т. *A* на пл. *H* проецируется в отрезок прямой, ⊥-й h'. На пл. *V* окружность проецируется в эллипс, построение которого не дела т Рис. 7.4.

Чтобы определить н.в. радиуса вра ения, можно воспользоваться способом прямоугольного треугольника (см. рис. 6.1).

Определение н.в. плоской фигуры вра ением вокруг линии уровня осу ествляется поворотом одной или двух точек плоскости до плоскости уровня.

Точки *A*, *1* плоскости, принадлежа ие горизонтали (рис. 7.5), оста ю тся неизменными, ибо $h \subset ABC$ — по условию алгоритма вра ения. Поэто-

3.4. Взаимное положение точки и плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит одной из прямых этой плоскости (рис. 3.5 *а*).

Для определения взаимного положения точки и плоскости об его положения следует провести на данной плоскости какую-нибудь вспомогательную прямую, конкурирую щ ую с данной точкой, и определить взаимное положение точки и вспомогательной прямой (рис. 3.5 *б*).

Если точка будет принадлежать вспомогательной прямой, то она принадлежит и плоскости.

Если точка окажется вне прямой, то она находится и вне данной плоскости. На рис. 3.5 *б* т. *M* принадлежит плоскости α(*ABC*): т. *L* находится перед плоскостью , ибо т. *L* по сравнению с конкурирую щей т. *3* (прямой *1-C*) плоскости лежит ближе и над плоскостью, ибо т. *L* лежит вы е по сравнению с конкурирую щ ей точкой *4* (прямой *5-C*) плоскости α(*ABC*).

Если точка находится в проециру щ ей плоскости, то ее проекция принадлежит вырожденной проекции плоскости (т. $N \in Z$).

Определение видимости точки по отно ению к плоскости на координатных плоскостях определяется по конкурирую щ им точкам плоскости. Так, точка *L*, конкурирую щ ая на фронтальную плоскость *V* в т. *3*, на фронтальной плоскости будет видима, так как лежит ближе. Точка *L* на горизонтальной плоскости также видима, так как она лежит вы е конкурирую щ ей точки *4* плоскости α(*ABC*).

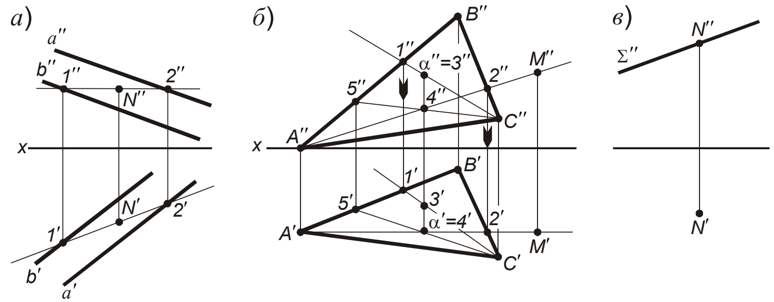


Рис. 3.5

3.5. Взаимное положение прямой и плоскости

Прямая может занимать относительно плоскости следую ие положения: лежать в плоскости, быть ∥ плоскости, пересекать плоскость, быть ⊥ плоскости.

Прямая в плоскости

Прямая лежит в плоскости, если две точки этой прямой принадлежат может быть на ортогональном чертеже определена с помощью прямоугольного треугольника.

Аналогично могут быть определены углы наклона плоскости и к плоскостям проекций V и W. Для этого используются прямые наибольшего уклона данной плоскости к соответствующим плоскостям проекций.

Прямые наибольшего уклона, перпендикулярные фронталям плоскости, образуют наибольший угол с фронтальной плоскостью. Прямые наибольшего уклона, перпендикулярные профильным прямым плоскости, образуют наибольший угол с профильной плоскостью проекций.

Угол, образованный между прямой наибольшего уклона и ее проекцией на выбранную плоскость проекций, определяет угол наклона плоскости общего положения к плоскости проекций.

На эпюре данный угол т н.в. соответствующих отрезков могут быть определен методом прямоугольного треугольника.

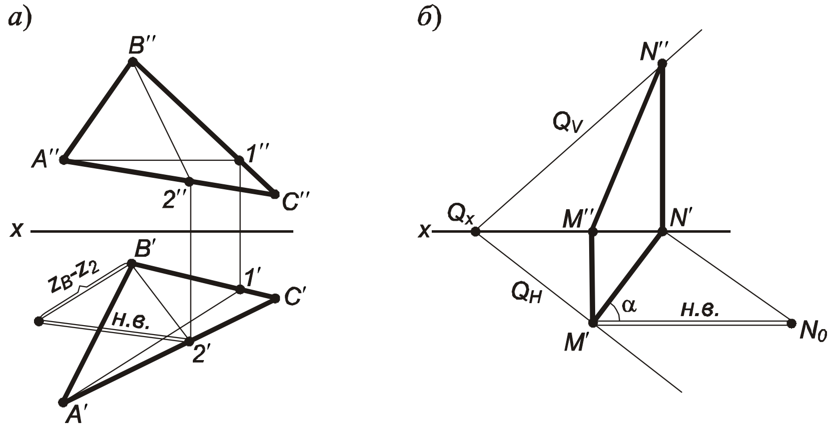


Рис. 6.4

Лекция 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

4.1. Прямая параллельна плоскости, если она ∥ какой-либо прямой, лежащей в плоскости. На рис. 4.1 *а* прямая $l \parallel$ прямой CB, и на рис. 4.1 *б* прямая $l \parallel 1\text{-}2$ ($1\text{-}2 \subset ABC$).

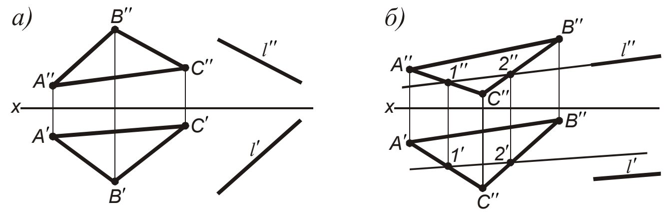


Рис. 4.1

4.2. Частные случаи пересечения прямой с плоскостью

Точка ∩ проецирующей прямой l с пл. $\alpha(ABC)$ общего положения (рис. 4.2 *а*) определяется из условий ∈ т. K пл. α.

Точка ∩ прямой l с проецирующей плоскостью Σ (рис. 4.2 *б*) определяется в ∩ вырожденной проекции Σ' с проекцией l''.

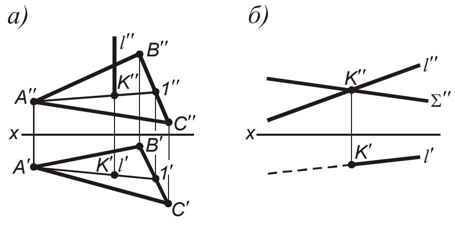


Рис. 4.2

4.3. Частные случаи пересечения плоскостей

Обе задачи решаются на основе вырожденных свойств проецирующих плоскостей. Рис. 4.3.

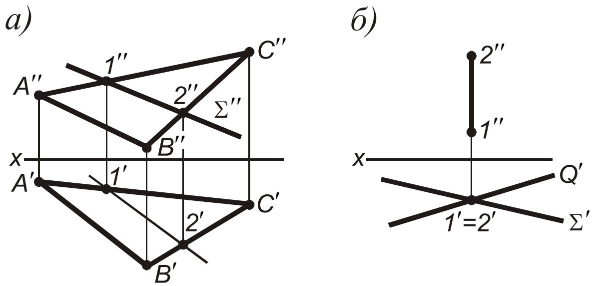


Рис. 4.3

угла наклона прямой и плоскости проекции: α — угол наклона прямой l к H, β— угол наклона прямой l к V.

6.2 Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Если в плоскости взять пересекающиеся горизонталь и фронталь, то можно воспользоваться свойствами проекций прямого угла.

Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция — фронтальной проекции фронтали (рис. 6.2 *а*, *б*).

Если плоскость задана следами, то прямая, ⊥-ная к ней, будет изображена проекциями прямой, ⊥-я к одноименным следам плоскости (здесь имеем горизонтальный след — горизонталь плоскости, фронтальный след — фронталь плоскости) (рис. 6.2 *в*).

Если прямая ⊥-я к проецирующей плоскости, то прямая должна быть, в свою очередь, линией уровня (рис. 6.2 *г*). $AK \parallel H$, $AK \parallel \Sigma$

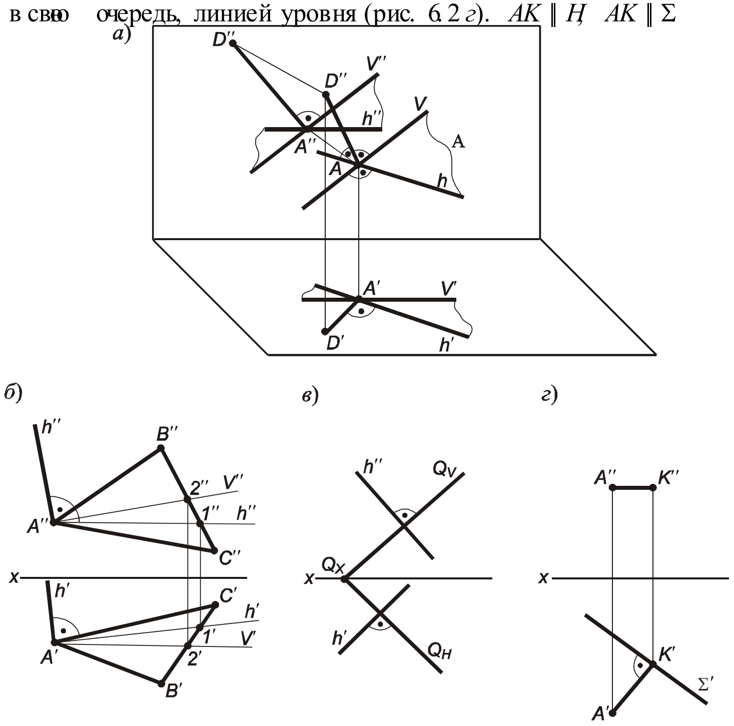


Рис. 6.2

4.5 Пересечение прямой с координатными плоскостями (следы прямой)

Следом прямой называет точку пересечения прямой с плоскостью проекций. Прямая общего положения имеет три следа: горизонтальный, фронтальный и профильный.

Прямые частного положения имеют один или два следа: проецирующие прямые имеют один след, прямые уровня — два следа. Так как любая координатная плоскость проекций является проецирующей на другие координатные плоскости, то задача построения следа прямой сводится к задаче нахождения точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью. Так, например, построение горизонтального следа l'_H прямой l (AB) (рис. 4.6 *а*, *б*) определяется в пересечении фронтальной проекции l'' с осью Ox.

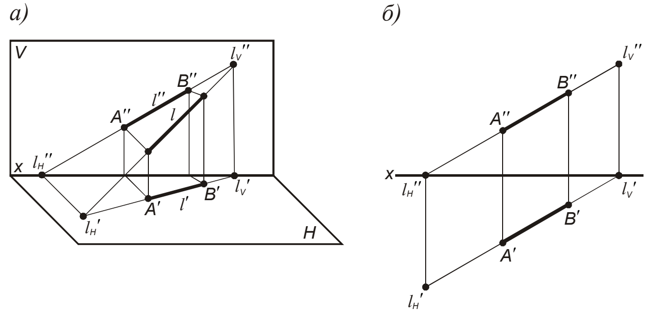


Рис. 4.6

4.6. Взаимно параллельные плоскости

Две плоскости и ∥, если две ∩ прямые одной плоскости ∥ двум ∩ прямым другой плоскости (рис. 4.7 *а*). У ∥ проецирующих плоскостей вырожденные проекции (Σ и Δ') параллельны (рис. 4.7 *б*), у ∥ плоскостей их одноименные следы также взаимно параллельны (рис. 4.7 *в*).

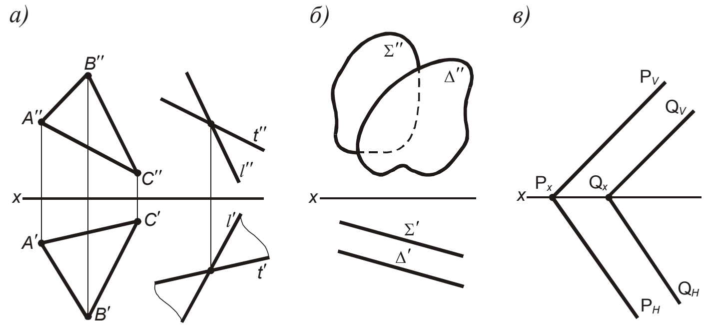


Рис. 4.7